

8장 급수

연습문제 해답

8.1 개요

1. (a) $(-1)^3 \frac{1}{7} + (-1)^4 \frac{1}{9} + (-1)^5 \frac{1}{11}$, 즉 $-\frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$
 (b) $a_1 + 4a_2 + 9a_3$
2. (a) 부분합은 $1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$. 점점 커지면서 진동하므로 급수는 발산한다.
 (b) 부분합은 $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, \dots$ 은 ∞ 로 다가가므로 급수는 ∞ 로 발산한다.
3. (a) $n \rightarrow \infty$ 일 때 $S_n \rightarrow \infty$ 이고 급수는 (∞ 로) 발산한다. 부분합이 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 이므로 급수 자체는 $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ 이다.
 (b) $n \rightarrow \infty$ 일 때 $S_n \rightarrow 1$ 이므로 급수는 1로 수렴한다. 부분합이 $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ 이므로 급수는 $1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \dots$ 이다.
4. 급수는 $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} - \frac{1}{5}) + \dots$ 이다. 부분합은 $S_1 = 1 - \frac{1}{2}, S_2 = 1 - \frac{1}{3}, S_3 = 1 - \frac{1}{4}$ 등등이다. 부분합의 극한은 1이고 급수는 1로 수렴한다.
5. $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ 와 $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ 는 모두 (∞ 로) 발산하고 두 급수의 합으로 만들어진 $2 + 3 + 4 + 5 + \dots$ 도 또한 발산한다. 반면에 $1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ 와 $(-1) + (-1) + (-1) + \dots$ 는 모두 발산하지만 두 급수의 합으로 만들어진 $0 + 0 + 0 + 0 + \dots$ 는 0으로 수렴한다.
6. S_{99} 는 첫 99개 항을 더한 것이고 S_{100} 은 첫 100개 항을 더한 것이므로 $S_{100} - S_{99} = a_{100}$ 이다.

8.2 등비급수

1. $r = -\frac{1}{6}, a = -1$ 이다. $-1 < r < 1$ 이므로 급수는 수렴하고 합은 $-1/(1 - (-\frac{1}{6})) = -\frac{6}{7}$ 이다.
2. $r = -\frac{1}{4}, a = \frac{1}{4}$. $\frac{1}{4}/(1 - (-\frac{1}{4})) = \frac{1}{5}$ 로 수렴한다.
3. $r = \frac{3}{2} > 1$. 급수는 (∞ 로) 발산한다.
4. $r = 3 > 1$. 급수는 (∞ 로) 발산한다.
5. 급수는 $1/4^3 + 1/4^4 + 1/4^5 + \dots$ 이므로 $a = 1/4^3, r = 1/4$ 이고 $\frac{1/4^3}{(1 - 1/4)} = 1/48$ 로 수렴한다.
6. $a = \frac{1}{4}, r = (\frac{2}{3})^2$. 급수는 $\frac{1}{4}/(1 - (\frac{2}{3})^2) = \frac{9}{20}$ 으로 수렴한다.

7. $a = 0.1, r = 0.1. 0.1/(1 - 0.1) = \frac{1}{9}$ 로 수렴한다.
8. 급수는 $\sin^2 \theta + \sin^4 \theta + \sin^6 \theta + \dots$ 이다. $a = \sin^2 \theta, r = \sin^2 \theta$ 이고 $\theta \neq \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$ 이면 $-1 < r < 1$ 이므로 $\sin^2 \theta / (1 - \sin^2 \theta) = \sin^2 \theta / \cos^2 \theta = \tan^2 \theta$ 로 수렴한다.
9. 급수는 $1/\pi + 1/\pi^3 + 1/\pi^5 + \dots$ 이다. $a = 1/\pi, r = 1/\pi^2$ 이므로 $\frac{1/\pi}{1 - 1/\pi^2} = \pi/(\pi^2 - 1)$ 로 수렴한다.

8.3 양항급수의 수렴 판정법 I

1. (a) 거짓
(b) 참
(c) 거짓
(d) 참
2. (a) $n!$ 가 더 높은 증가 차수를 가지므로 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $n!/4^n \rightarrow \infty$ 이고 일반항 판정법에 의해 이 급수는 발산한다.
(b) 4^n 이 더 높은 증가 차수를 가지므로 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $n^2/4^n \rightarrow 0$ 이다. 일반항 판정법으로는 어떠한 결론도 내릴 수 없다.
3. (a) $r = 1/3$ 인 등비급수고 수렴한다.
(b) $p = 2$ 인 p -급수이고 수렴한다.
(c) $p = 1/2$ 인 p -급수이고 발산한다.
(d) $n \rightarrow \infty$ 일 때 일반항 $\sqrt{n} \rightarrow \infty$ 이므로 일반항 판정법에 의해 발산한다.
(e) 표준 수렴 급수이다.
(f) $p = 3$ 인 p -급수이고 수렴한다.
(g) $p = 3/2$ 인 p -급수의 홀수항의 합으로 이루어진 부분급수이므로 수렴한다.
(h) 5와 6을 제외하면 조화급수이고 발산한다.
(i) 일반항 $n/(n+1)$ 이 0이 아닌 1로 수렴하므로 일반항 판정법에 의해 발산한다.
(j) $1/2^n n! < 1/n!$ 이고 $\sum 1/n!$ 은 수렴하는 급수이므로 비교 판정법에 의해 수렴한다.
(k) $1/n 2^n < 1/2^n$ 이고 $\sum 1/2^n$ 은 수렴하는 등비급수이므로 비교 판정법에 의해 수렴한다.
(l) $p = 5$ 인 p -급수이고 수렴한다.
(m) $r = 1/5$ 인 등비급수이고 수렴한다.
(n) $1/ne^n < 1/e^n$ 이고 $1/e^3 + 1/e^4 + \dots$ 는 $r = 1/e$ 인 수렴하는 등비급수이므로 비교 판정법에 의해 수렴한다.
(o) $p = 2$ 인 p -급수이고 수렴한다.
(p) $\frac{1}{8} + \frac{1}{88} + \frac{1}{888} + \dots < \frac{1}{8} + \frac{1}{80} + \frac{1}{800} + \dots$ 이고 $\frac{1}{8} + \frac{1}{80} + \frac{1}{800} + \dots$ 는 $r = 1/10$ 인 수렴하는 등비급수이므로 비교 판정법에 의해 수렴한다.
(q) 수렴하는 급수인 $\sum 1/n!$ 의 짝수항으로 이루어진 부분급수이므로 수렴한다.

4. (a) $\sum a_n$ 이 수렴하므로 $a_n \rightarrow 0$ 이다. 그러면 $1/a_n$ 은 0으로 수렴하지 않는다. 따라서 $\sum 1/a_n$ 은 일반항 판정법에 의해 발산한다.
- (b) $a_n/n! < a_n$ 이다. 따라서 $\sum a_n$ 이 수렴한다면 비교 판정법에 의해 $\sum a_n/n!$ 도 수렴한다.
- (c) 수렴과 발산을 말할 수 없다. 만일 $\sum a_n$ 이 $\sum 1/n!$ 이라면 $\sum n!a_n = 1 + 1 + 1 + \dots$ 이고 발산한다. 만일 $\sum a_n$ 이 $\sum 1/(n!)^2$ 이면 $\sum n!a_n = \sum 1/n!$ 이고 수렴한다.
- (d) $\sum a_n$ 이 수렴하므로 $a_n \rightarrow 0$ 이다. 그러면 $\cos a_n \rightarrow 1$ 이고 일반항 판정법에 의해 $\sum \cos a_n$ 은 발산한다.

8.4 양항급수의 수렴 판정법 II

1. $\frac{1}{2n^2+n} = \frac{1}{2} \frac{1}{n^2+n/2} < \frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$. 그런데 $\sum 1/n^2$ 은 $p = 2$ 인 p -급수이므로 수렴하고 $\sum 1/(2n^2 + n)$ 도 수렴한다.

2.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[2(n+1)]!(3n)!}{[3(n+1)]!(2n)!} = \frac{(2n+2)!(3n)!}{(3n+3)!(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 $a_{n+1}/a_n \rightarrow 0$ 이고 (분모는 3차, 분자는 2차 다항식) 비율 판정법에 의해 수렴한다.

3. $p = 1/3$ 인 p -급수이고 발산한다.
4. $r = 1/3$ 인 등비급수이므로 수렴한다.
5. $n \rightarrow \infty$ 일 때 $n!/10^n$ 이 0으로 다가가지 않는다. 일반항 판정법에 의해 급수는 발산한다.
6. $n \rightarrow \infty$ 일 때, $\sqrt[n]{2} \rightarrow 1$ 이므로 $1/\sqrt[n]{2}$ 가 0으로 수렴하지 않는다. 따라서 $\sum 1/\sqrt[n]{2}$ 는 일반항 판정법에 의해 발산한다.
7. $\sum 1/n^3$ 과 특성이 같고 이 급수는 $p = 3$ 인 p -급수이므로 수렴한다.
8. $-\sum (n-1)/n^2$ 은 $-\sum 1/n$ 과 수렴 특성이 비슷하고 $\sum 1/n$ 은 발산하는 조화급수이므로 급수는 발산한다.

9.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2(\frac{3}{4})^{n+1}}{n^2(\frac{3}{4})^n} = \frac{3}{4} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2$$

이 극한은 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $\frac{3}{4}$ 이다. 비율 판정법에 의해 급수는 수렴한다.

10.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{10^n} = \frac{10}{n+1}$$

이 극한은 $n \rightarrow \infty$ 일 때 0이다. 비율 판정법에 의해 급수는 수렴한다.

11. $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$ 인데 $\sum 1/\sqrt{n}$ 은 $p = 1/2$ 인 p -급수이므로 발산하고 따라서 $\sum \ln n/\sqrt{n}$ 도 발산한다.
12. $n \rightarrow \infty$ 일 때 $(n-1)/n$ 이 0으로 수렴하지 않으므로 일반항 판정법에 의해 발산한다.
13. $2\sum 1/n$ 과 특성이 같고 $\sum 1/n$ 은 발산하는 조화급수이므로 원래의 급수도 발산한다.

14.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} \frac{5^n}{n^2} = \frac{1}{5} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 $\frac{1}{5}$. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

15. $r = 0.1$ 인 등비급수이므로 수렴한다. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)}{3 \cdot 6 \cdots (3n)(3n+3)} \cdot \frac{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \frac{2n+1}{3n+3}$

16.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 \cdot 6 \cdots (3n)(3n+3)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} = \frac{2n+1}{3n+3}$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 $\frac{2}{3}$. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

17. $r = 1/5$ 인 등비급수이므로 수렴한다.

18.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)!}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{(n+1)!} = \frac{n+2}{2n+3}$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 $\frac{1}{2}$. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

19. $-1 < r = e/3 < 1$ 인 등비급수이므로 수렴한다.

20. $r = e/2 > 1$ 인 등비급수이므로 발산한다.

21. 수렴하는 ($p = 2$ 인 p -급수) $\sum 1/n^2$ 의 홀수항으로만 이루어진 부분급수이므로 수렴한다.

22. $1/n(n+1) < 1/n^2$ 이고 $\sum 1/n^2$ 은 $p = 2$ 인 p -급수이므로 수렴한다. 따라서 $\sum 1/n(n+1)$ 도 수렴한다.

23. $(n+1)/n\sqrt{n} > n/n\sqrt{n} = 1/\sqrt{n}$ 이고 $\sum 1/\sqrt{n}$ 은 $p = 1/2$ 인 p -급수이므로 발산한다. 따라서 $\sum (n+1)/n\sqrt{n}$ 도 발산한다.

24. $n \rightarrow \infty$ 일 때 $n/(n-1) \rightarrow 1$ 이므로 일반항 판정법에 의해 발산한다.

25.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2 (2n)!}{[2(n+1)]! (n!)^2} = \frac{(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 $\frac{1}{4}$ 이다. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

26.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}} \frac{3^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 $\frac{1}{3}$ 이다. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

27. $a_n = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n+2)}{(2n+3)!}$ 이고 $a_{n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots (2n+2)(2n+4)}{(2n+5)!}$ 이므로

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+4}{(2n+5)(2n+4)} = \frac{1}{2n+5}$$

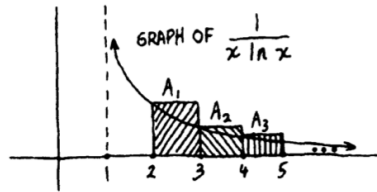
$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 0 이다. 비율 판정법에 의해 수렴한다.

28. 주어진 급수는 $\sum \sqrt{n}/n = \sum 1/\sqrt{n}$ 과 수렴 특성이 비슷하고 $\sum 1/\sqrt{n}$ 이 발산하므로 급수는 발산한다.

29. $r = \frac{3}{4}$ 인 등비급수이므로 수렴한다.
30. $\frac{n+1}{n^2} > \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$ 인데 $\sum 1/n$ 이 발산하므로 $\sum (n+1)/n^2$ 도 발산한다.
31. $\sum 1/(4n-2)$ 는 $\frac{1}{4} \sum 1/n$ 과 수렴특성이 비슷하고 $\sum 1/n$ 이 발산하므로 급수는 발산한다.
32. $\frac{1}{n4^n} < \frac{1}{4^n}$ 이고 $\sum 1/4^n$ 은 수렴하는 등비급수이므로 $\sum 1/n4^n$ 도 수렴한다.
33. $\ln n$ 이 $\sqrt{n}$ 보다 더 낮은 증가차수를 가지므로 $\ln n < \sqrt{n}$ 이다. 따라서 $\frac{\ln n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = 1/n^{3/2}$ 이고 $\sum 1/n^{3/2}$ 는 $p = 3/2$ 인 p -급수이므로 수렴한다. 따라서 $\sum (\ln n)/n^2$ 도 수렴한다.
34. $\frac{1}{n^2 \ln n} < \frac{1}{n^2}$ 이고 $\sum 1/n^2$ 은 $p = 2$ 인 p -급수이므로 수렴한다. 따라서 $\sum 1/(n^2 \ln n)$ 도 수렴한다.
35. (아래 그림 참조)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \cdots &= A_1 + A_2 + A_3 + \cdots \\ &\geq \int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln 2}^\infty 1/u \, du = \ln u \Big|_{\ln 2}^\infty = \infty \end{aligned}$$

그러므로 주어진 급수는 발산한다.



36. (a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots = \sum_{n=1}^\infty 1/(2n-1)$ 은 $\frac{1}{2} \sum 1/n$ 과 수렴 특성이 비슷하고 $\sum 1/n$ 이 발산하므로 급수는 발산한다. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots = \sum 1/2n = \frac{1}{2} \sum 1/n$ 도 발산한다.
- (b) 대단히 많이 존재한다. 예를 들어 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$ 는 $r = \frac{1}{2}$ 인 등비급수로서 수렴한다. 또 다른 예는 $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdots$ 는 $p = 2$ 인 p -급수로서 수렴한다.
37. (a) $\sum a_n$ 이 $\sum 1/n^2$ 이라고 하면, 이 급수는 수렴하지만 $\sum na_n = \sum 1/n$ 은 발산한다. 한편 $\sum a_n = \sum 1/n^3$ 이라고 하면, 이 급수는 수렴하고 $\sum na_n = \sum 1/n^2$ 도 수렴한다.
- (b) $\sum a_n$ 이 비율 판정법에 의해 수렴한다면, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n < 1$ 이다. 그러면 $\sum na_n$ 에 대한 비율 판정법은 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \times (1 \text{ 보다 작은 값})$. 따라서 극한은 1보다 작고 $\sum na_n$ 은 비율 판정법에 의해 수렴한다.

8.5 교대급수

- $1/\sqrt{n} \downarrow 0$ 이므로 $\sum (-1)^{n+1}/\sqrt{n}$ 은 교대급수 판정법에 의해 수렴한다. S_{24} 를 사용하면 추정 오차는 $1/\sqrt{25} = 1/5$ 보다 작고 맨 마지막 항 $1/\sqrt{24}$ 가 빼는 값이므로 추정값은 급수의 합보다 작다.
- (a) $1/n! \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. 0.001보다 처음으로 작아지는 항은 $1/7!$ 이므로 $1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + 1/5! - 1/6! = \frac{455}{720}$ 을 추정값으로 사용한다.

- (b) $1/n^n \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. 0.001보다 처음으로 작아지는 항은 $1/5^5$ 이므로 $1/4^4$ 을 추정값으로 사용한다. (즉, 첫 항만 더한다)
3. (a) 거짓
(b) 일반항 판정법에 의해 참
4. (a) $n^2/n! \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.
(b) $n!/n^2$ 은 0으로 수렴하지 않는다. 따라서 일반항 판정법에 의해 주어진 급수는 발산한다.
(c) $1/n \ln n \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.
(d) $2n/(n^2 + 4) \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.
(e) $r = -0.1$ 인 등비급수이므로 수렴한다.
(f) 항들이 1로 수렴하므로 일반항 판정법에 의해 발산한다.
(g) $\sqrt{n-1}/n \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다.
5. (a) 참. $\sum b_n$ 이 수렴하면 $b_n \rightarrow 0$ 이다. 궁극적으로는 $0 < b_n < 1$ 이고 그러면 $b_n^2 < b_n$ 이다. 그러므로 $\sum b_n^2$ 은 비교 판정법에 의해 수렴한다.
(b) 거짓. 만일 $b_n = 1/\sqrt{n}$ 이면 $\sum (-1)^{n+1} b_n$ 은 교대급수 판정법에 의해 수렴한다. 그러나 $\sum b_n^2$ 은 $\sum 1/n$ 이고 발산한다.
6. (a) 모든 경우에 $a_n \downarrow 0$ 이므로 모든 급수는 수렴한다.
(b) 8.3절 [표 8-1]의 교대급수 버전으로 생각하면, 조건 수렴과 절대 수렴을 구분하는 선은 [표 8-1]에서 수렴과 발산을 구분하는 선과 같은 위치에 있다. 즉 $\sum (-1)^{n+1} 1/n^p$ 은 $p \leq 1$ 이면 조건 수렴이고 $p > 1$ 이면 절대 수렴이다.
7. (a) $n/(1+n^2) \downarrow 0$ 이므로 급수는 수렴한다. 그러나 절대값의 급수인 $\sum n/(1+n^2)$ 은 $\sum 1/n$ 과 수렴 특성이 같고, 이 급수는 발산한다. 그러므로 주어진 급수는 조건 수렴한다.
(b) 절대값의 급수인 $\sum (n+2)/(n^2+3)$ 은 $\sum n/n^3 = \sum 1/n^2$ 와 수렴 특성이 같고, 이 급수는 수렴한다. 그러므로 주어진 급수는 절대 수렴한다.
8. (a) $\sum a_n$ 은 절대 수렴할 수 없다. 그러나 이 급수가 조건 수렴할지 또는 발산할지는 알 수 없다.
(b) $\sum a_n$ 은 수렴하고 또한 절대 수렴한다.
9. (a) $\sum |a_n|$ 은 발산한다.
(b) 어떠한 결론도 내릴 수 없다(그림 8-5를 보면 수렴하는 급수에 대해 $\sum |a_n|$ 이 발산할 수도 있고 수렴할 수도 있다.)
10. (a) $1/n! \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. 절댓값의 급수는 $\sum 1/n!$ 이고 수렴한다. 따라서 (8.32)에 의해 원래 주어진 급수는 수렴한다.
(b) $1/\sqrt{n} \downarrow 0$ 이므로 교대급수 판정법에 의해 주어진 급수는 수렴한다. 절댓값의 급수는 $\sum 1/\sqrt{n}$ 이고 발산한다. 원래 주어진 급수에 대해서는 어떠한 결론도 내릴 수 없다.

11. (a) 수렴하는 등비급수의 공비는 $-1 < r < 1$ 을 만족한다. 절댓값으로 이루어진 급수의 공비는 $0 < r < 1$ 이다 (예를 들면 $r = -\frac{2}{3}$ 이면 절댓값의 급수는 $r = \frac{2}{3}$ 이다. 만일 $r = \frac{1}{7}$ 이면 절댓값의 급수는 $r = \frac{1}{7}$ 이다) 따라서 절댓값의 급수는 수렴하고 그러므로 원래 급수는 절대 수렴한다.
- (b) p -급수는 양항급수이다. 절댓값의 급수도 원래 급수와 같다. 따라서 원래 급수는 절대 수렴한다.

8.6 멱급수

1.

$$\frac{|x^{n+1} \text{항}|}{|x^n \text{항}|} = \frac{|(n+2)x^{n+1}|}{|(n+1)x^n|} = \frac{n+2}{n+1}|x|$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 $|x|$ 이다. 수렴 구간은 $|x| < 1$, 즉 $-1 < x < 1$.

2.

$$\frac{|x^{n+1} \text{항}|}{|x^n \text{항}|} = \left| \frac{x^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)^2} \right| \left| \frac{3^n n^2}{x^n} \right| = \frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 |x|$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 $\frac{1}{3}|x|$ 이다. 수렴 구간은 $\frac{1}{3}|x| < 1$, $|x| < 3$, 즉 $-3 < x < 3$.

3.

$$\frac{|x^{n+1} \text{항}|}{|x^n \text{항}|} = \frac{|(n+1)!x^{n+1}|}{|n!x^n|} = (n+1)|x|$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 ∞ ($x = 0$ 일 때만 제외). 급수는 $x = 0$ 일 때에만 수렴하고 수렴 반경은 0이다.

4.

$$\frac{|x^{n+1} \text{항}|}{|x^n \text{항}|} = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \left| \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{1}{n+1}|x|$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 0이다. 급수는 모든 x 에 대해서 수렴한다. 즉, 수렴 구간은 $(-\infty, \infty)$.

5. 주어진 급수는 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1}$.

$$\frac{|x^{2n+3} \text{항}|}{|x^{2n+1} \text{항}|} = \frac{|x^{2n+3}|}{|x^{2n+1}|} = |x^2| = x^2$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 x^2 이다. 수렴 구간은 $x^2 < 1$, 즉 $-1 < x < 1$.

6. 주어진 급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} x^{2n+1}$.

$$\frac{|x^{2n+3} \text{항}|}{|x^{2n+1} \text{항}|} = \frac{|2^{2n+2} x^{2n+3}|}{|2^{2n} x^{2n+1}|} = 2^2 |x^2| = 4x^2$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 $4x^2$. 수렴 구간은 $4x^2 < 1$, 즉 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$

7. 주어진 급수는 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n / n$.

$$\frac{|x^{n+1} \text{항}|}{|x^n \text{항}|} = \left| \frac{3^{n+1} x^{n+1}}{n+1} \right| \left| \frac{n}{3^n x^n} \right| = 3 \frac{n}{n+1} |x|$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 $3|x|$. 수렴 구간은 $3|x| < 1$, 즉 $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

8.7 초등함수의 멱급수 표현

1. (a) $q = 1/3$ 인 이항급수 전개를 하면,

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/3} &= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(-2/3)}{2!}x^2 + \frac{1/3(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{3!}x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1) \\ &= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3^2 2!}x^2 + \frac{2 \cdot 5}{3^3 3!}x^3 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4 4!}x^4 + \cdots \quad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

- (b)

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x} &= x \cdot \frac{1}{1-x} = x(1+x+x^2+x^3+\cdots) \quad (-1 < x < 1) \\ &= x+x^2+x^3+x^4+\cdots \quad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

- (c) $q = -3$ 인 이항급수 전개를 하면,

$$\begin{aligned}(1+x)^{-3} &= 1 - 3x + \frac{(-3)(-4)}{2!}x^2 + \frac{(-3)(-4)(-5)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - 3x + \frac{3 \cdot 4}{2!}x^2 - \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3!}x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)\end{aligned}$$

- (d)

$$\frac{1}{2-3x} = \frac{1}{2(1-\frac{3}{2}x)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{3}{2}x}$$

$1/(1-x)$ 의 x 에 $\frac{3}{2}x$ 를 대신 대입하여 급수 전개를 하면

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{3}{2}x} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}x\right)^2 + \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + \cdots \right) \quad \left(-1 < \frac{3}{2}x < 1\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2}x + \frac{3^2}{2^3}x^2 + \frac{3^3}{2^4}x^3 + \cdots \quad \left(-\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$

- (e)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(3+x)^6} &= \frac{1}{3^6(1+\frac{1}{3}x)^6} = \frac{1}{3^6} \left(1 + \frac{1}{3}x \right)^{-6} \\ &= \frac{1}{3^6} \left(1 - 6 \left(\frac{1}{3}x\right) + \frac{(-6)(-7)}{2!} \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + \frac{(-6)(-7)(-8)}{3!} \left(\frac{1}{3}x\right)^3 + \cdots \right) \quad \left(-1 < \frac{1}{3}x < 1\right) \\ &= \frac{1}{3^6} - \frac{6}{3^7}x + \frac{6 \cdot 7}{3^8 2!}x^2 - \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3^9 3!}x^3 + \cdots \quad (-3 < x < 3)\end{aligned}$$

- (f) (방법 1) 부분 분수 분해를 하면

$$\frac{x}{(1-x)(1-3x)} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-3x}$$

$1/(1-x)$ 의 급수 전개식을 이용하면

$$\begin{aligned}-\frac{\frac{1}{2}}{1-x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-3x} &= -\frac{1}{2}(1+x+x^2+x^3+\cdots) + \frac{1}{2}(1+3x+9x^2+27x^3+\cdots) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(3^n - 1)x^n\end{aligned}$$

첫번째 항의 급수의 수렴 구간은 $-1 < x < 1$ 이고 두번째 항의 급수의 수렴 구간은 $-1 < 3x < 1$, 즉 $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ 이므로 두 급수의 합의 수렴 구간은 더 작은 $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$ 이다.

(방법 2) $1/(1-x)$ 에 대한 급수 전개식과 $1/(1-3x)$ 에 대한 급수 전개식을 곱하고 다시 x 를 곱한다.

(g)

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{-2(1-\frac{1}{2}x)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}x}$$

$1/(1-x)$ 의 x 에 $\frac{1}{2}x$ 를 대신 대입하여 급수 전개를 하면

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}x} &= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^3 + \cdots \right) \quad (-1 < \frac{1}{2}x < 1) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}x - \frac{1}{2^3}x^2 - \cdots \quad (-2 < x < 2) \end{aligned}$$

(h) $\ln(2+x) = \ln 2[1 + \frac{1}{2}x] = \ln 2 + \ln(1 + \frac{1}{2}x)$. 식 (8.48)을 이용하면

$$\begin{aligned} \ln(2+x) &= \ln 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}x\right)^4 + \cdots \quad (-1 < \frac{1}{2}x < 1) \\ &= \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2 \cdot 2}x^2 + \frac{1}{2^3 \cdot 3}x^3 - \frac{1}{2^4 \cdot 4}x^4 + \cdots \quad (-2 < x < 2) \end{aligned}$$

2. $q = \frac{1}{2}$ 인 이항급수 전개식에서 x 대신 $-3x^2$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} \sqrt{1-3x^2} &= 1 + \frac{1}{2}(-3x^2) + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}(-3x^2)^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}(-3x^2)^3 + \cdots \quad (-1 < -3x^2 < 1) \\ &= 1 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3^2}{2^2 2!}x^4 - \frac{3^3 \cdot 1 \cdot 3}{2^3 3!}x^6 - \frac{3^4 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 4!}x^8 + \cdots \quad (x^2 < \frac{1}{3}, -\sqrt{\frac{1}{3}} < x < \sqrt{\frac{1}{3}}) \end{aligned}$$

x^{34} 을 포함하는 항은 $-\frac{3^{17} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 31}{2^{17} 17!}x^{34}$ 이다. 급수를 합기호로 나타내면

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} x^{2n}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} (1+(-x^2))^{-1} &= 1 + (-1)(-x^2) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(-x^2)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-x^2)^3 + \cdots \quad (-1 < -x^2 < 1) \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots \quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

(b) $1/(1-x)$ 의 등비급수 전개식에서 x 대신 x^2 을 대입하면

$$\begin{aligned} (1+(-x^2))^{-1} &= 1 + x^2 + (x^2)^2 + (x^2)^3 + \cdots \quad (-1 < x^2 < 1) \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots \quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (1+(-x^2))^{-1} &= \frac{1}{1-x} \frac{1}{1+x} \\ &= (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1-x+x^2-x^3+\cdots) \quad (-1 < x < 1) \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots \quad (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x^2} &= \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} \\
&= \frac{1}{2}(1-x+x^2-x^3+\cdots) + \frac{1}{2}(1+x+x^2+x^3+\cdots) \\
&= 1+x^2+x^4+x^6+\cdots \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

(e) 긴 나눗셈을 하면

$$\begin{array}{r}
1+x^2+x^4+\cdots \\
1-x^2 \overline{) 1} \\
\underline{1-x^2} \\
x^2 \\
\underline{x^2-x^4} \\
x^4 \text{ 등등}
\end{array}$$

그러므로 $1/(1-x^2) = 1+x^2+x^4+\cdots$. 이미 알려져 있는 급수로부터 얻어진 것이 아니므로 수렴 구간이 바로 주어지지 않고 비율 판정법을 이용하여 $(-1, 1)$ 임을 찾아야 한다.

4. (a)

$$\begin{aligned}
(1+(-x))^{-2} &= 1 - 2(-x) + \frac{(-2)(-3)}{2!}(-x)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}(-x)^3 + \cdots \quad (-1 < -x < 1) \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} \frac{1}{1-x} &= (1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x+x^2+x^3+\cdots) \quad (-1 < x < 1) \\
&= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \quad (-1 < x < 1)
\end{aligned}$$

5. (a) $1/(1-x)$ 의 전개식에서 x 대신 $-x^2$ 을 대입하여 먼저 $1/(1+x^2)$ 의 급수 전개식을 구하면 $1/(1+x^2) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$ ($-1 < x < 1$)이다. 양변의 역미분을 수행하면 $\tan^{-1} x = C + x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots$ ($-1 < x < 1$)이고 $x = 0$ 으로 두면 $C = 0$ 이다. 따라서

$$\tan^{-1} x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

(b) (a)의 결과에서 x 대신 x^2 을 대입하면

$$\tan^{-1} x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \frac{x^{14}}{7} + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

이다. 그러므로 양변을 0에서 1/2까지 적분하면

$$\int_0^{1/2} \tan^{-1} x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{1/2} - \left. \frac{x^7}{3 \cdot 7} \right|_0^{1/2} + \left. \frac{x^{11}}{5 \cdot 11} \right|_0^{1/2} - \cdots = \frac{1}{24} - \frac{1}{(21)(128)} + \cdots$$

세 번째 항부터 0.0001보다 작아지므로 첫 두 항의 합인 $\frac{111}{2688}$ 을 추정값으로 사용한다. 추정값에서 마지막 항은 뺀 값이기 때문에 실제 합보다 추정값이 적다.

6. 주어진 급수는 $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ 를 미분하고 x 를 곱하면 얻을 수 있으므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \\ \frac{x}{(1-x)^2} &= x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots\end{aligned}$$

7. (a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^{n-1}} x^n$

(b) $f'(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2^3} + \dots$

(c) $f'(x)$ 는 $r = \frac{1}{2}x$ 인 등비급수이므로 $-1 < \frac{1}{2}x < 1$ 이면 $1/(1 - \frac{1}{2}x)$ 로 수렴한다. 즉 $f'(x)$ 는 함수 $1/(1 - \frac{1}{2}x)$ 이다. $f(x)$ 는 $f'(x)$ 의 역도함수이므로 $f(x) = -2\ln(1 - \frac{1}{2}x) + C$ 이고 $x = 0$ 으로 두면 $C = 0$ 이다. 따라서 $f(x) = -2\ln(1 - \frac{1}{2}x)$ 이다.

8. (a)

$$4\left(1 + \frac{3}{16}\right)^{1/2} = 4\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{16}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{16}\right)^2/2! + \dots\right) = 4 + 4(0.09375) - 4(0.0043945) + \dots$$

교대급수이고 네 번째 항은 0.01보다 작다. 그러므로 첫 세 항의 합을 추정값으로 사용한다.

(b) 이항급수는 $-1 < x < 1$ 에 대해 수렴한다. 따라서 $x = 18$ 로 이항급수를 사용할 수 없다. 참고로 (a)에서 $x = \frac{3}{16}$ 이었고 이 값은 -1과 1 사이의 값이다.

8.8 매클로린 급수

1.

$$\begin{aligned}f(x) &= (1+x)^q \\ f'(x) &= q(1+x)^{q-1} \\ f''(x) &= (q-1)q(1+x)^{q-2} \\ f'''(x) &= (q-2)(q-1)q(1+x)^{q-3} \\ &\vdots\end{aligned}$$

그러므로 $f(0) = 1$, $f'(0) = q$, $f''(0) = q(q-1)$, $f'''(0) = q(q-1)(q-2)$, $\dots$ 이다. 따라서 매클로린 급수는

$$(1+x)^q = 1 + qx + \frac{q(q-1)}{2!}x^2 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}x^3 + \dots$$

이고 이항급수 전개식과 일치한다.

2. $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\ f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\ f'''(x) &= \frac{3 \cdot 2}{(1-x)^4} \\ f^{(4)}(x) &= \frac{4!}{(1-x)^5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

그러므로 $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 2, f'''(0) = 3!, f^{(4)}(0) = 4!, \dots$ 이다. 따라서 매클로린 급수는

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3!}{3!}x^3 + \dots = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

로 등비급수 전개, 식 (8.39)와 일치한다.

$f(x) = \ln(1+x)$ 라고 하자. 그러면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \\ f^{(4)}(x) &= -\frac{3 \cdot 2}{(1+x)^4} \\ f^{(5)}(x) &= \frac{4!}{(1+x)^5} \\ &\vdots \end{aligned}$$

그러므로 $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f'''(0) = 2, f^{(4)}(0) = -3!, f^{(5)}(0) = 4!, \dots$ 이다. 따라서 매클로린 급수는

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{3!}{4!}x^4 + \dots \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots \end{aligned}$$

로 식 (8.48)과 일치한다. 두 경우 모두 수렴 구간은 비율 판정법을 이용하여 찾아야 한다.

3. (a) (방법 1) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ 라고 하면, $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), f''(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \dots$. 그러므로 $f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = 1, \dots$ 이고 매클로린 급수는 $x + x^3/3! + x^5/5! + \dots$ 이다. 수렴 구간 $(-\infty, \infty)$ 를 찾기 위해서는 비율 판정법을 사용해야 한다.

(방법 2) 모든 x 에 대해 $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$ 이므로 모든 x 에 대해 $e^{-x} = 1 + (-x) + (-x)^2/2! + (-x)^3/3! + \dots = 1 - x + x^2/2! - x^3/3! + \dots$ 이다. 급수끼리 서로 빼면 모든 x 에 대해 $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \frac{1}{2}(2x + 2x^3/3! + 2x^5/5! + \dots) = x + x^3/3! + x^5/5! + \dots$

- (b) (방법 1) $f(x) = \frac{1}{3-2x}$ 라고 하면, $f'(x) = \frac{2}{(3-2x)^2}, f''(x) = \frac{2^2 \cdot 2}{(3-2x)^3}, f'''(x) =$

$\frac{2^3 \cdot 3!}{(3-2x)^4}, f^{(4)}(x) = \frac{2^4 \cdot 4!}{(3-2x)^5}, \dots$ 그러므로 $f(0) = \frac{1}{3}, f'(0) = 2/3^2, f''(0) = 2^2 \cdot 2/3^3, f'''(0) = 2^3 \cdot 3!/3^4, f^{(4)}(0) = 2^4 \cdot 4!/3^5, \dots$ 이고 매클로린 급수는 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}x + \frac{2^2 \cdot 2}{3^3} \frac{x^2}{2!} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^4} \frac{x^3}{3!} + \dots = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2}x + \frac{2^2}{3^3}x^2 + \frac{2^3}{3^4}x^3 + \dots$ 수렴 구간 $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ 를 찾기 위해서는 비율 판정법을 사용해야 한다.

(방법 2) $\frac{1}{3-2x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}x} = \frac{1}{3}(1 + \frac{2}{3}x + (\frac{2}{3}x)^2 + (\frac{2}{3}x)^3 + \dots), -1 < \frac{2}{3}x < 1.$

4.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

5. (a) 식 (8.53) 에 의해

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + \dots \quad (-\infty < 3x < \infty) \\ &= 1 - \frac{3^2}{2!}x^2 + \frac{3^4}{4!}x^4 - \frac{3^6}{6!}x^6 + \dots \quad \forall x \end{aligned}$$

(b) 식 (8.52) 에 의해

$$x^3 \sin x = x^3 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = x^4 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{5!} - \dots \quad \forall x$$

(c) 식 (8.54) 에 의해

$$e^{4x} = 1 + (4x) + \frac{(4x)^2}{2!} + \frac{(4x)^3}{3!} + \dots = 1 + 4x + \frac{4^2}{2!}x^2 + \frac{4^3}{3!}x^3 + \dots \quad \forall x$$

6.

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \left[1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \dots \right] \right) \\ &= \frac{2}{2!}x^2 - \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 - \dots \quad \forall x \end{aligned}$$

7. $f''(x) = g'(x) = f(x), f'''(x) = f'(x) = g(x), f^{(4)}(x) = g'(x) = f(x), \dots$ 이므로 $f(0) = 1, f'(0) = g(0) = 0, f''(0) = f(0) = 1, f'''(0) = g(0) = 0, f^{(4)}(0) = 1, \dots$ 이고 매클로린 급수는 $1 + x^2/2! + x^4/4! + x^6/6! + \dots$ 이다. 비율 판정법을 이용하여 수렴 구간을 구한다.

$$\frac{|x^{2n+2}/(2n+2)!|}{|x^{2n}/(2n)!|} = \frac{|x^{2n+2}|}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{|x^{2n}|} = \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 0 이므로 급수는 모든 x 에 대해 수렴한다.

8.

$$\sin(-x) = (-x) - (-x)^3/3! + (-x)^5/5! - \dots = -x + x^3/3! - x^5/5! + \dots = -\sin x$$

9. $e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots$ 를 미분하면 $\frac{d}{dx}e^x = 0 + 1 + 2x/2! + 3x^2/3! + 4x^3/4! + \dots = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots = e^x$ 가 된다. 즉 $(e^x)' = e^x$ 이다.

10. $\sin 1 = 1 - 1/3! + 1/5! - 1/7! + \dots$ 이다. 처음으로 0.0001보다 작아지는 항은 $1/9!$ 이므로 처음 네 개항까지의 합을 추정값으로 사용하고 이 값은 맨 마지막 항 $1/7!$ 이 뺄셈이므로 실제 값보다 작게 추정된 값이다.

11. (a) e^x 의 급수 전개에서 x 대신 $-x^2$ 을 대입하여 얻는 전개식을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^2} dx &= \int_0^1 (1 - x^2 + x^4/2! - x^6/3! + \dots) dx \\ &= x \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} \Big|_0^1 - \dots \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \dots\end{aligned}$$

교대 급수에서 네 번째 항이 처음으로 0.1보다 작은 수가 되므로 $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10}$ 을 추정값으로 사용한다.

- (b) $q = -4$ 인 이항급수 전개식에서 x 대신 x^2 을 대입하여 얻는 전개식을 이용하면

$$\begin{aligned}\int_0^{1/3} \frac{1}{(1+x^2)^4} dx &= \int_0^{1/3} \left(1 - 4x^2 + \frac{(-4)(-5)}{2!}x^4 + \frac{(-4)(-5)(-6)}{3!}x^6 + \dots \right) dx \\ &= \frac{1}{3} - \frac{4}{3} \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \frac{20}{10} \left(\frac{1}{3} \right)^5 - \dots\end{aligned}$$

교대 급수이고 처음으로 0.01보다 작은 항은 세 번째 항이므로 첫 두 항의 합을 추정값으로 사용한다.

12. (a) 식 (8.48)을 이용하면

$$\ln(1+x^2) = x^2 - (x^2)^2/2 + (x^2)^3/3 - \dots = x^2 - x^4/2 + x^6/3 - x^8/4 + \dots$$

식 (8.53)을 이용하면

$$1 - \cos x = x^2/2! - x^4/4! + x^6/6! - \dots$$

그러므로

$$\frac{\ln(1+x^2)}{1 - \cos x} = \frac{x^2 - x^4/2 + x^6/3 - x^8/4 + \dots}{x^2/2! - x^4/4! + x^6/6! - \dots} = \frac{1 - x^2/2 + x^4/3}{1/2! - x^2/4! + x^4/6! - \dots}$$

이고 $x \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 $1/(1/2!) = 2$.

- (b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + \dots}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - x^2/3! + x^4/5! - \dots) = 1$$

13. 식 (8.49)에 의해 모든 x 에 대해 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$. $x = 1$ 로 두면 $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$. 즉 답은 e .

8.9 테일러의 나머지 공식과 e 의 근삿값

8.10 테일러 급수

1. 비율 판정법을 사용하면

$$\left| \frac{(x-4)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}} \right| \left| \frac{n3^n}{(x-4)^n} \right| = \frac{1}{3} \frac{n}{n+1} |x-4|$$

$n \rightarrow \infty$ 일 때 극한은 $\frac{1}{3}|x-4|$. 수렴 구간은 $\frac{1}{3}|x-4| < 1, -3 < x-4 < 3, 1 < x < 7$.

2. (a) 주어진 함수는 $x = -8$ 에서 발산하고 -8 근방으로는 전개할 수 없다. 즉 $x - (-8), x + 8$ 의 멱급수로는 전개할 수 없다.

(b) $\ln x$ 는 $x = 0$ 에서 발산하고 $x < 0$ 에 대해서는 정의할 수 없다. 그러므로 0 근방이나 어떠한 음수 근방에서는 멱급수로 전개할 수 없다. 예를 들면 $x, x+1, x+2, x+\frac{1}{2}, x+\pi$ 등의 멱급수로는 전개할 수 없다.

3. (a) (방법 1) $\ln x = \ln((x-1)+1)$ 이므로 $u = x-1$ 로 두면 $-1 < u < 1$ 에 대해

$$\begin{aligned}\ln((x-1)+1) &= \ln(1+u) = u - u^2/2 + u^3/3 - u^4/4 + \cdots \\ &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots \quad (0 < x < 2)\end{aligned}$$

(방법 2) $f(x) = \ln x$ 이면 $f'(x) = 1/x, f''(x) = -1/x^2, f'''(x) = 2/x^3, f^{(4)}(x) = -3!/x^4, \dots$ 이므로 $f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = -1, f'''(1) = 2, f^{(4)}(1) = -3!, \dots$ 이다. 식 (8.60)을 이용하면 $(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 - \frac{3!}{4!}(x-1)^4 + \cdots$ 이고 정리하면 (방법 1)에서 얻어낸 급수와 동일하다. 수렴 구간은 비율 판정법을 이용하여 구해야 한다.

(b)

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin((x-\pi)+\pi) \quad (u = x-\pi) \\ &= \sin(u+\pi) = \sin u \cos \pi + \cos u \sin \pi = -\sin u \\ &= -(u - u^3/3! + u^5/5! - \cdots), \forall u \\ &= -(x-\pi) + (x-\pi)^3/3! - (x-\pi)^5/5! + \cdots, \forall x\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}e^x &= e^{(x-1)+1} \quad (u = x-1) \\ &= e^{u+1} = ee^u \\ &= e(1 + u + u^2/2! + u^3/3! + \cdots), \quad \forall u \\ &= e + e(x-1) + \frac{e}{2!}(x-1)^2 + \frac{e}{3!}(x-1)^3 + \cdots, \quad \forall x\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{1}{-6-x} &= \frac{1}{-5-(x+1)} \quad (u = x+1) \\ &= -\frac{1}{5} \frac{1}{1+\frac{1}{5}u} \quad (\text{등비급수 사용}) \\ &= -\frac{1}{5} \left(1 + \left(-\frac{1}{5}u\right) + \left(-\frac{1}{5}u\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}u\right)^3 + \cdots \right), \quad -1 < -\frac{1}{5}u < 1 \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{u}{5^2} - \frac{u^2}{5^3} + \frac{u^3}{5^4} - \cdots, \quad -5 < u < 5 \\ &= -\frac{1}{5} + \frac{x+1}{5^2} - \frac{(x+1)^2}{5^3} + \frac{(x+1)^3}{5^4} - \cdots, \quad -6 < x < 4\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} &= \frac{1}{(x+2)-2} \quad (u = x+2) \\
&= \frac{1}{u-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{2}u} \quad (\text{등비급수 사용}) \\
&= -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2}u + \left(\frac{1}{2}u\right)^2 + \left(\frac{1}{2}u\right)^3 + \cdots \right), \quad -1 < -\frac{1}{2}u < 1, -2 < u < 2 \\
&= -\frac{1}{2} - \frac{x+2}{2^2} - \frac{(x+2)^2}{2^3} - \frac{(x+2)^3}{2^4} - \cdots, \quad -2 < x+2 < 2, -4 < x < 0
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= \sqrt{(x-9)+9} \quad (u = x-9) \\
&= \sqrt{u+9} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}u} \quad (\text{이항급수 사용}) \\
&= 3 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{9}u\right) + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!} \left(\frac{1}{9}u\right)^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!} \left(\frac{1}{9}u\right)^3 + \cdots \right), \quad -1 < \frac{1}{9}u < 1, -9 < u < 9 \\
&= 3 + \frac{1}{2 \cdot 3}(x-9) - \frac{1}{3^3 2^2 2!}(x-9)^2 + \frac{3}{3^5 2^3 3!}(x-9)^3 - \frac{3 \cdot 5}{3^7 2^4 4!}(x-9)^4 + \cdots, \quad 0 < x < 18 \\
(x-9)^{50} \text{의 계수는 } &-\frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots 97}{3^{99} 2^{50} 50!} \text{ 이다.}
\end{aligned}$$

(g) (방법 1)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x+8)^5} &= \frac{1}{((x-1)+9)^5} \quad (u = x-1) \\
&= \frac{1}{(u+9)^5} = \frac{1}{9^5} \left(1 + \frac{1}{9}u \right)^{-5} \quad (\text{이항급수 사용}) \\
&= \frac{1}{9^5} \left(1 - 5 \left(\frac{1}{9}u\right) + \frac{(-5)(-6)}{2!} \left(\frac{1}{9}u\right)^2 + \frac{(-5)(-6)(-7)}{3!} \left(\frac{1}{9}u\right)^3 + \cdots \right), \quad -1 < \frac{1}{9}u < 1 \\
&= \frac{1}{9^5} - \frac{5}{9^6}(x-1) + \frac{5 \cdot 6}{9^7 2!}(x-1)^2 - \cdots, \quad -8 < x < 10
\end{aligned}$$

$$(x-1)^{19} \text{의 계수는 } -\frac{5 \cdots 6 \cdot 7 \cdots 23}{9^{24} 19!} \text{ 이다.}$$

(방법 2)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{(x+8)^5} \\
f'(x) &= \frac{-5}{(x+8)^6} \\
f''(x) &= \frac{5 \cdot 6}{(x+8)^7} \\
f'''(x) &= \frac{-5 \cdot 6 \cdot 7}{(x+8)^8} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

따라서 $f(1) = 1/9^5$, $f'(1) = -5/9^6$, $f''(1) = 5 \cdot 6/9^7$, $f'''(1) = -5 \cdot 6 \cdot 7/9^8$, $\cdots$ 이고
급수는

$$\frac{1}{9^5} - \frac{5}{9^6}(x-1) + \frac{5 \cdot 6}{9^7 2!}(x-1)^2 - \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{9^8 3!}(x-1)^3 + \cdots$$

수렴 구간은 비율 판정법을 이용하면 $(-8, 10)$ 을 얻는다.

(h)

$$\begin{aligned}
 \cos 2x &= \cos 2\left((x + \tfrac{1}{2}\pi) - \tfrac{1}{2}\pi\right) = \cos(2(x + \tfrac{1}{2}\pi) - \pi) \\
 &= \cos 2(x + \tfrac{1}{2}\pi) \cos \pi + \sin 2(x + \tfrac{1}{2}\pi) \sin \pi = -\cos 2(x + \tfrac{1}{2}\pi) \quad (u = 2(x + \tfrac{1}{2}\pi)) \\
 &= -(1 - u^2/2! + u^4/4! - u^6/6! + u^8/8! - \cdots), \quad \forall u \\
 &= -1 + \frac{2^2}{2!}(x + \tfrac{1}{2}\pi)^2 - \frac{2^4}{4!}(x + \tfrac{1}{2}\pi)^4 + \frac{2^6}{6!}(x + \tfrac{1}{2}\pi)^6 - \cdots, \quad \forall x
 \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned}
 \ln 3x &= \ln 3 + \ln(2 + (x - 2)) = \ln 3 + \ln 2 + \ln(1 + \tfrac{1}{2}(x - 2)) = \ln 6 + \ln(1 + \tfrac{1}{2}(x - 2)) \quad (u = \tfrac{1}{2}(x - 2)) \\
 &= \ln 6 + u - u^2/2 + u^3/3 - u^4/4 + \cdots, \quad -1 < u < 1 \\
 &= \ln 6 + \frac{1}{2}(x - 2) - \frac{1}{2^2 \cdot 2}(x - 2)^2 + \frac{1}{2^3 \cdot 3}(x - 2)^3 - \frac{1}{2^4 \cdot 4}(x - 2)^4 + \cdots, \quad 0 < x < 4
 \end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 + 2x} &= \frac{1}{-7 + 2(x + 4)} = -\frac{1}{7} \frac{1}{1 - \frac{2}{7}(x + 4)} \quad (u = \tfrac{2}{7}(x + 4)) \\
 &= -\frac{1}{7}(1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + \cdots), \quad -1 < u < 1 \\
 &= -\frac{1}{7} - \frac{2}{7^2}(x + 4) - \frac{2^2}{7^3}(x + 4)^2 - \frac{2^3}{7^4}(x + 4)^3 - \cdots, \quad -\frac{15}{2} < x < -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$